

Petite boîte à outils mathématiques pour la physique-chimie

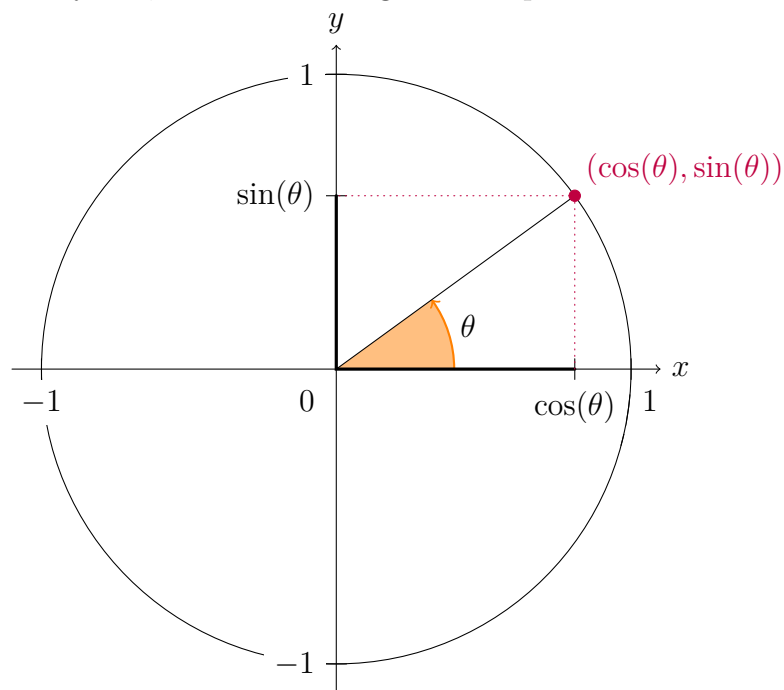
On rappelle dans cette fiche quelques notions mathématiques dont on aura besoin en physique-chimie et que l'on reverra en cours de mathématiques plus tard dans l'année.

Trigonométrie

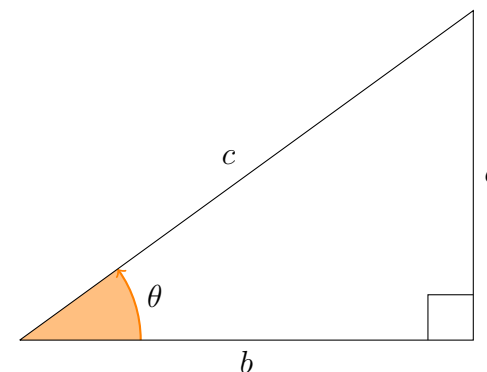
Rappelons la définition géométrique des fonctions trigonométriques.

Sur le cercle trigonométrique

Sur le cercle trigonométrique, c'est-à-dire le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1, les fonctions trigonométriques se lisent ainsi.



Dans un triangle rectangle



Sur le triangle rectangle ci-dessus, les fonctions trigonométriques se lisent ainsi :

$$\begin{cases} \sin(\theta) = \frac{a}{c} \\ \cos(\theta) = \frac{b}{c} \\ \tan(\theta) = \frac{a}{b}. \end{cases}$$

Graphes des fonctions trigonométriques

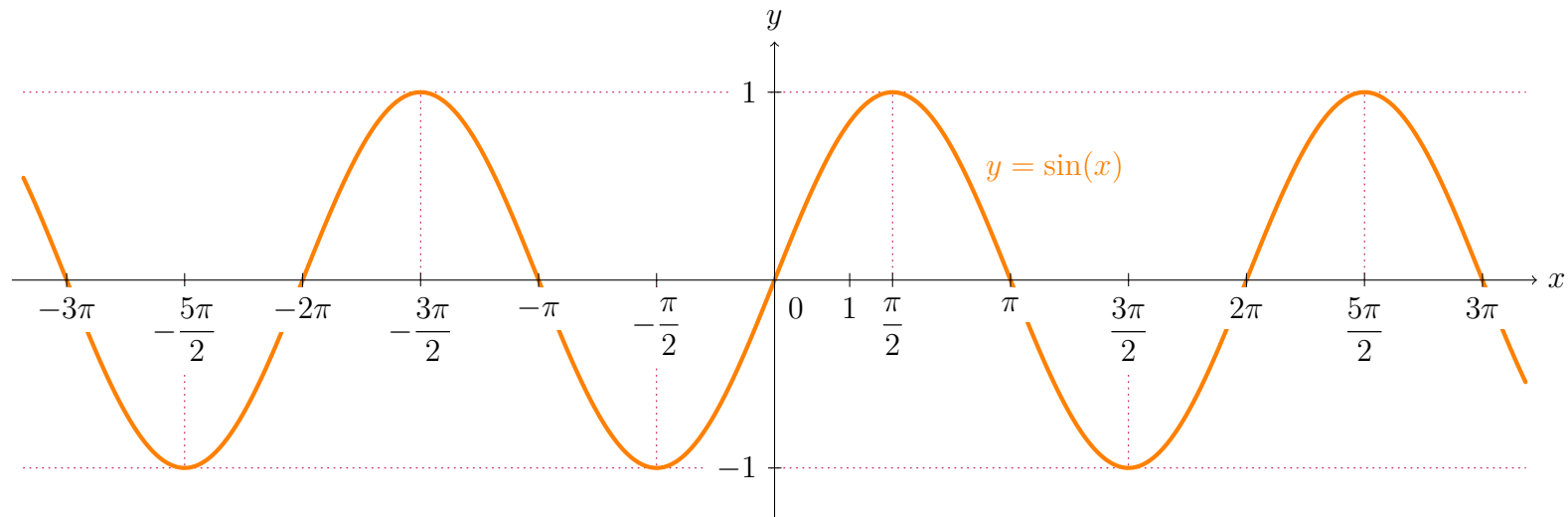


FIGURE 1 – Le graphe de la fonction sinus

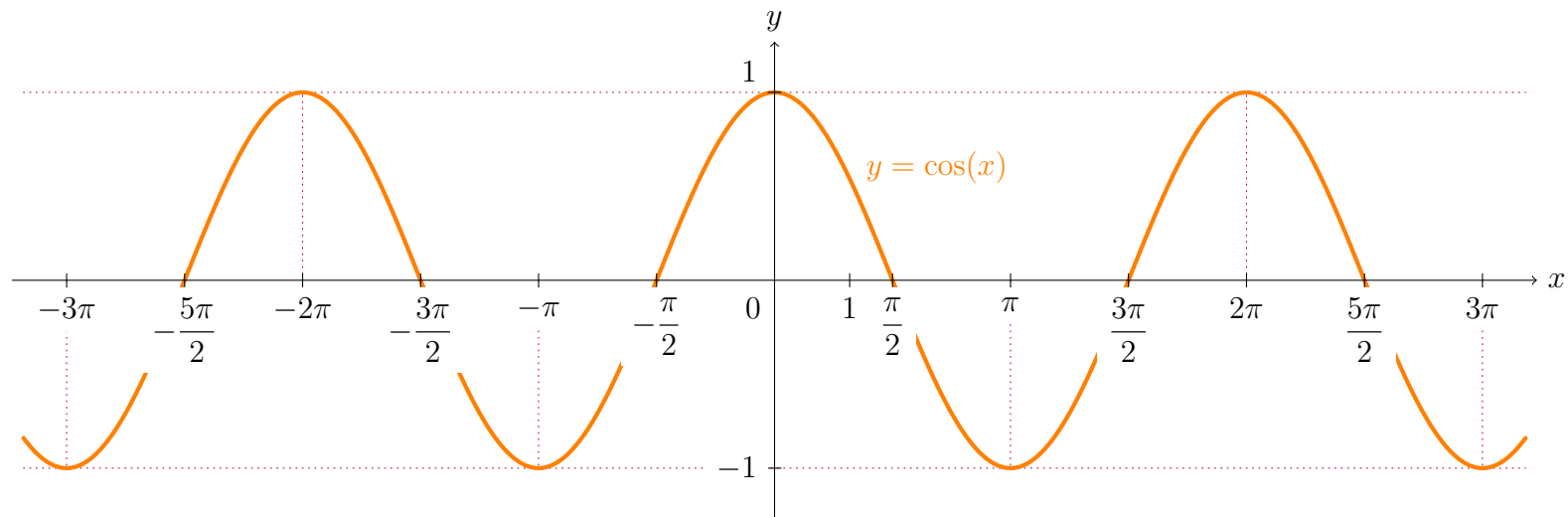


FIGURE 2 – Le graphe de la fonction cosinus

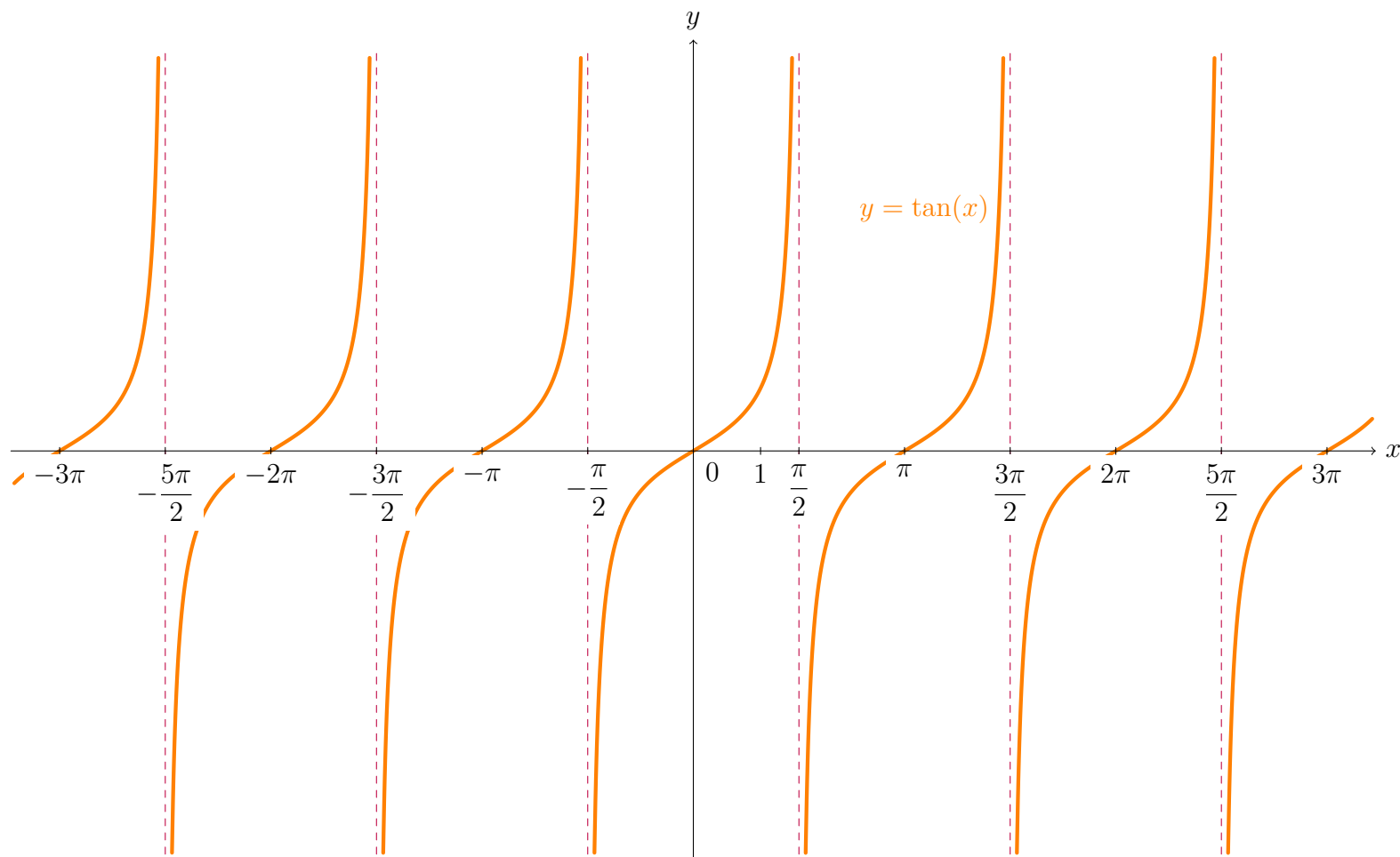


FIGURE 3 – Le graphe de la fonction tangente $\tan = \frac{\sin}{\cos}$

Symétries des fonctions trigonométriques

Périodicité

Les fonctions sinus et cosinus sont 2π -périodiques :
pour tout x réel, on a

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x).$$

La fonction tangente est π -périodique :
pour tout x réel tel que $\cos(x) \neq 0$, on a

$$\tan(x + \pi) = \tan(x).$$

Rotation d'un demi-tour

Pour tout x réel, on a :

$$\cos(x + \pi) = -\cos(x)$$

$$\sin(x + \pi) = -\sin(x)$$

C'est grâce à ces propriétés que l'on montre la π -périodicité de la fonction tangente.

Parité et imparité

La fonction cosinus est paire : pour tout x réel, on a

$$\cos(-x) = \cos(x).$$

La fonction sinus est impaire : pour tout x réel, on a

$$\sin(-x) = -\sin(x).$$

La fonction tangente est impaire aussi :
pour tout x réel tel que $\cos(x) \neq 0$, on a

$$\tan(-x) = -\tan(x).$$

Rotation d'un quart de tour

Pour tout x réel, on a :

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$$

Formules de trigo

Super formule de trigo

Pour tout x réel, on a $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Somme de deux angles

Pour tous x et y réels, on a :

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$$

$$\cos(x - y) = \cos(x) \cos(y) + \sin(x) \sin(y)$$

Pour tous x et y réels, on a :

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$$

$$\sin(x - y) = \sin(x) \cos(y) - \cos(x) \sin(y).$$

Double d'un angle

En particulier, pour tout x réel, on a :

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$= 2 \cos^2(x) - 1$$

$$= 1 - 2 \sin^2(x).$$

En particulier, pour tout x réel, on a :

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x).$$

Fonctions trigonométriques réciproques

On admet l'existence d'une fonction continue $\arcsin : [-1; 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ telle que :

$$\begin{cases} \text{pour tout } y \in [-1; 1], \sin(\arcsin(y)) = y; \\ \text{pour tout } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \arcsin(\sin(x)) = x. \end{cases}$$

On admet l'existence d'une fonction continue $\arccos : [-1; 1] \longrightarrow [0; \pi]$ telle que :

$$\begin{cases} \text{pour tout } y \in [-1; 1], \cos(\arccos(y)) = y; \\ \text{pour tout } x \in [0; \pi], \arccos(\cos(x)) = x. \end{cases}$$

On admet l'existence d'une fonction continue $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ telle que :

$$\begin{cases} \text{pour tout } y \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(y)) = y; \\ \text{pour tout } x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, \arctan(\tan(x)) = x. \end{cases}$$

Nous construirons et manipulerons ces fonctions plus en détails en cours de mathématiques plus tard dans l'année.

Fonctions exponentielle et logarithmes

Exponentielle

La fonction $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x) \\ \exp(0) = 1. \end{cases}$$

La fonction exponentielle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et sa bijection réciproque est la fonction $\ln$:

$$\begin{cases} \text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*, \exp(\ln(x)) = x \\ \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \ln(\exp(x)) = x. \end{cases}$$

Pour tous x et y réels, pour tout entier relatif n , on a :

$$\begin{aligned} \exp(x + y) &= \exp(x) \exp(y) \\ \exp(-x) &= \frac{1}{\exp(x)} \\ \exp(nx) &= \exp(x)^n. \end{aligned}$$

La fonction exponentielle se comporte donc comme une fonction puissance.

On note alors, pour tout x réel, $e^x = \exp(x)$.

Logarithme népérien

La fonction $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est l'unique primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1 :

$$\begin{cases} \text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*, \ln'(x) = \frac{1}{x} \\ \ln(1) = 0. \end{cases}$$

La fonction $\ln$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ et sa bijection réciproque est la fonction exponentielle :

Pour tous x et y strictement positifs, pour tout entier relatif n , on a :

$$\begin{aligned} \ln(xy) &= \ln(x) + \ln(y) \\ \ln\left(\frac{1}{x}\right) &= -\ln(x) \\ \ln(x^n) &= n \ln(x). \end{aligned}$$

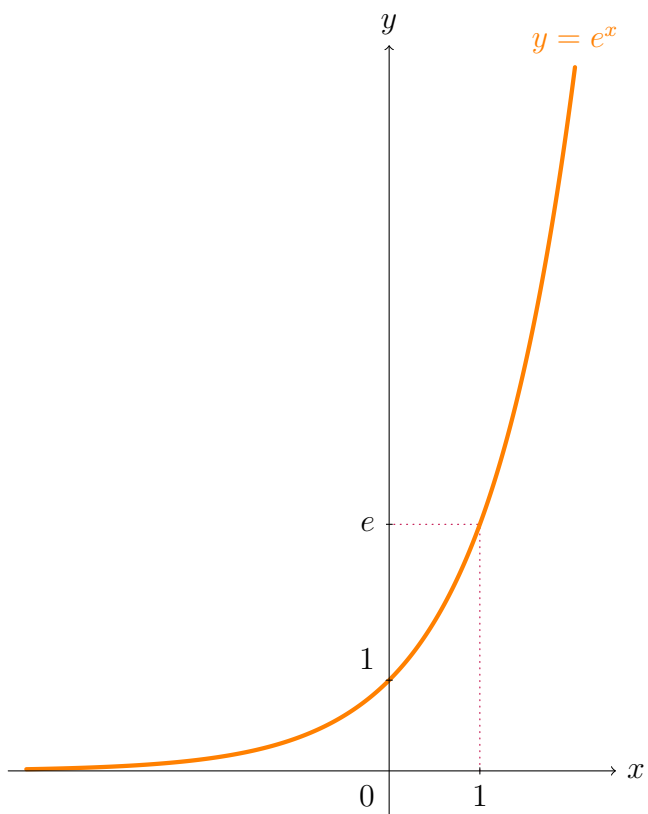


FIGURE 4 – Le graphe de la fonction exponentielle

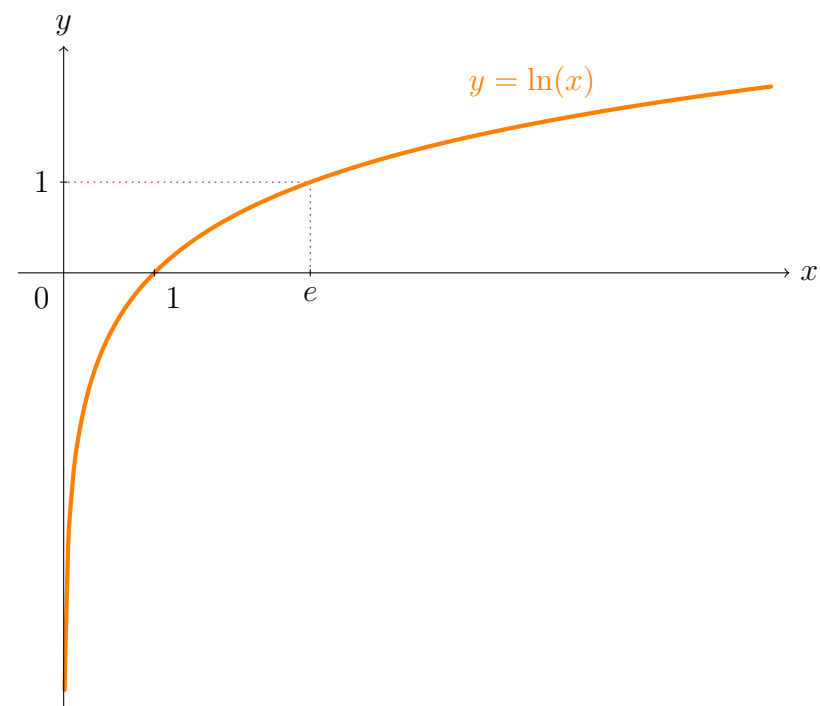


FIGURE 5 – Le graphe de la fonction logarithme népérien

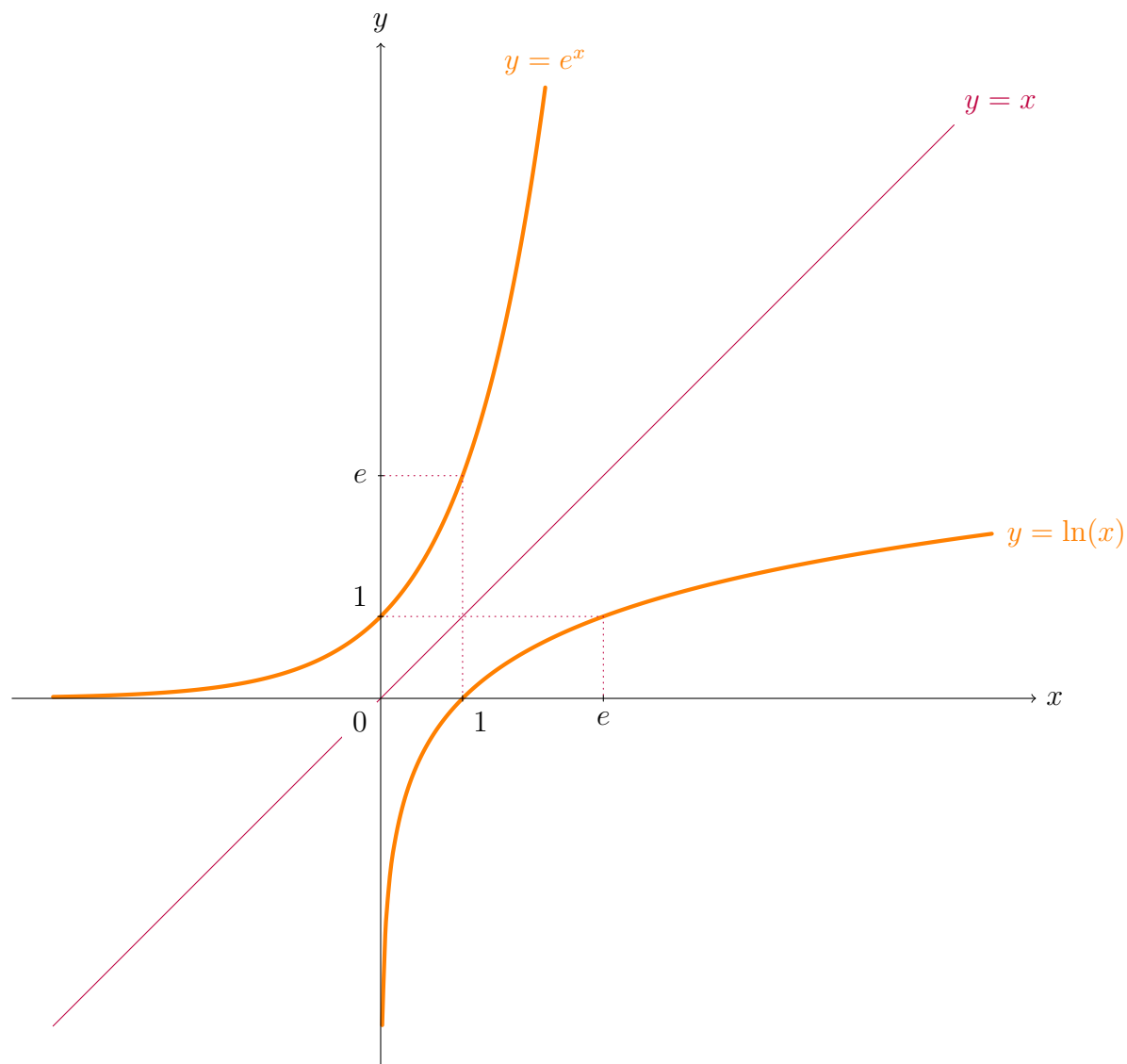


FIGURE 6 – Les graphes des fonctions exponentielle et logarithme népérien

Logarithme décimal

De même que l'on définit la fonction $\ln$ comme la réciproque de l'exponentielle, on définit la fonction $\log: \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ comme la réciproque de la fonction $x \longmapsto 10^x$:

$$\begin{cases} \text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*, 10^{\log(x)} = x \\ \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \log(10^x) = x. \end{cases}$$

Plus explicitement, la fonction $\log$ est définie de la manière suivante : pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}.$$

Condition nécessaire d'extremum local

Soit I un intervalle *ouvert* de $\mathbb{R}$ et soit a un point de I .

Soit $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Extremums locaux

On dit que la fonction f admet un **maximum local** en a s'il existe un petit intervalle $]a - \delta; a + \delta[$ autour de a tel que :

$$\text{pour tout } x \in]a - \delta; a + \delta[, f(a) \geqslant f(x).$$

On dit que la fonction f admet un **minimum local** en a s'il existe un petit intervalle $]a - \delta; a + \delta[$ autour de a tel que :

$$\text{pour tout } x \in]a - \delta; a + \delta[, f(a) \leqslant f(x).$$

On dit que la fonction f admet un **extremum local** en a si f admet un minimum local ou un maximum local en a .

Condition nécessaire d'extremum local

Supposons que la fonction f soit dérivable.

Si la fonction f admet un extremum local en a , **alors** $f'(a) = 0$.

Autrement dit, aux points où la fonction admet un extremum local, la courbe admet une tangente horizontale.

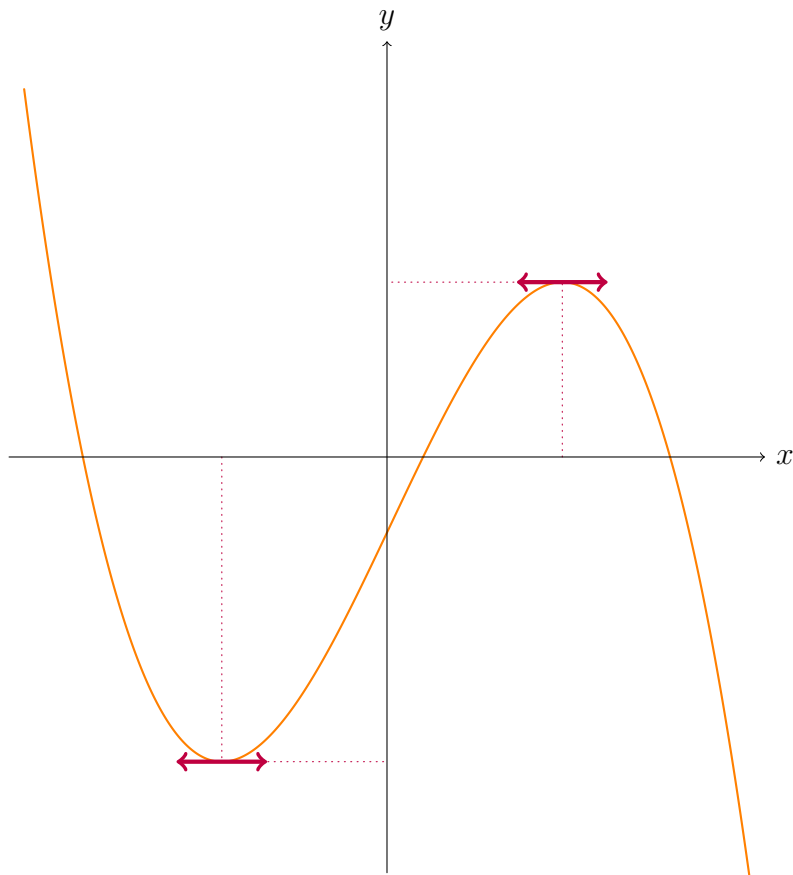


FIGURE 7 – Cette fonction admet deux extremums locaux.

Ce n'est pas une condition suffisante !

Attention, la condition ci-contre n'est pas suffisante.

Par exemple, la fonction cube admet une tangente horizontale en 0 sans pourtant admettre d'extremum local en 0 !

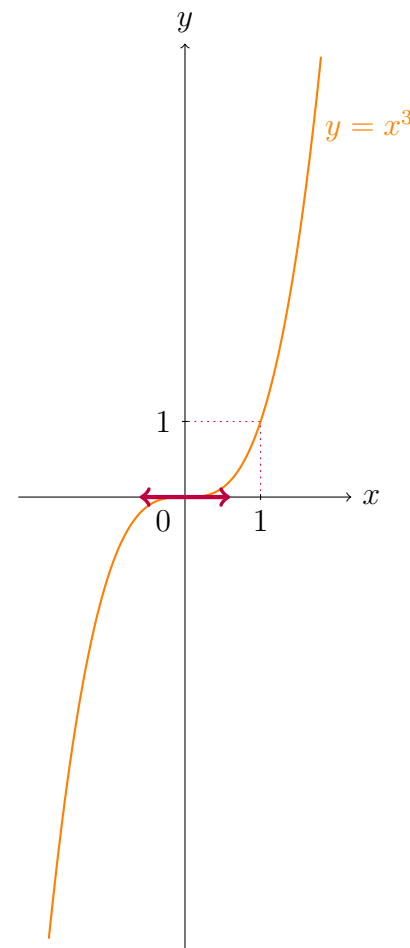


FIGURE 8 – Le graphe de la fonction cube

En physique-chimie, il sera la plupart du temps implicite que la fonction considérée admet un extremum.